ANNALS of the ORADEA UNIVERSITY.
Fascicle of Management and Technological Engineering

# LANT CINEMATIC ÎNCHIS PRIN INERTIE

**Gheorghe DELIU, Sorin VLASE**
University TRANSILVANIA of Brasov

**Abstract** In the paper is presented a multibody system with two degree of freedom, used to a pump acted by wind. Is interesting to note that, despite the fact of existing of two degree of freedom, this mechanism can perform a motion quasi-periodical.

First, a kinematical analysis presents the liaisons between the generalized coordinates. These results are used in the dynamical analysis of the whole mechanism. Finally, the motion equations of the pump are presented. These equations are analyzed qualitative to demonstrate the quasi-periodical motion.

We must note that, in this case, the motion is strongly determined by the inertia of an element.

## 1. INTRODUCERE

Lucrarea îsi propune analiza dinamica a unui mecanism regulator închis prin inertie, utilizat la turbinele eoliene pentru transformarea miscarii de rotatie într-o miscare de translatie rectilinie. Mecanismul are doua grade de libertate, ceea ce complica analiza, iar reglarea miscarii este facuta prin inertia unui element cu miscare compusa. Este utilizata scrierea simbolica a ecuatiilor de miscare si este utilizata proprietatea de ortogonalitate a fortelor de legatura si a deplasarilor virtuale, compatibile cu legaturile, pentru a elimina fortele de legatura si a simplifica ecuatiile de miscare obtinute.

## 2. ECUATIILE DE MISCARE

Se considera sistemul multicorp din fig. 1. Sistemul are doua grade de libertate. Sa luam drept coordonate independente unghiul de rotatie $?_1$ si deplasarea orizontala $x_D$ . Analiza cinematica ne ofera ecuatiile de legatura între vitezele si acceleratiile coordonatelor dependente si cele a coordonatelor independente. Ecuatiile de contur pentru mecanismul considerat vor fi (exista un singur contur vectorial):

$$\begin{array}{l} ?\, l_1c_1 \;?\; l_2c_2 \;?\; l_3c_3 \;?\; x_D \;?\; 0 \\ ? \\ ?\, l_1s_1 \;?\; l_2s_2 \;?\; l_3s_3 \;?\; 0 \end{array}$$

unde s-a notat:

$$c_1 \;?\; \cos ?_1 \quad ; \quad c_2 \;?\; \cos ?_2 \quad ; \quad c_3 \;?\; \cos ?_3$$
$$s_1 \;?\; \sin ?_1 \quad ; \quad s_2 \;?\; \sin ?_2 \quad ; \quad s_3 \;?\; \sin ?_3$$

Prin derivare se obtin legaturile între viteze:

$$\begin{cases} ? l_1 ?_1 s_1 ? l_2 ?_2 s_2 ? l_3 ?_3 s_3 ? \dot{x}_D ? 0 \\ l_1 ?_1 c_1 ? l_2 ?_2 c_2 ? l_3 ?_3 c_3 ? 0 \end{cases}$$

si daca se mai deriveaza o data se poate scrie:

$$\begin{cases} ? l_1 ?_1 s_1 ? l_2 ?_2 s_2 ? l_3 ?_3 s_3 ? l_1 ?_1^2 c_1 ? l_2 ?_2^2 c_2 ? l_3 ?_3^2 c_3 ? \ddot{x}_D ? 0 \\ l_1 ?_1 c_1 ? l_2 ?_2 c_2 ? l_3 ?_3 c_3 ? l_1 ?_1^2 s_1 ? l_2 ?_2^2 s_2 ? l_3 ?_3^2 s_3 ? 0 \end{cases}$$

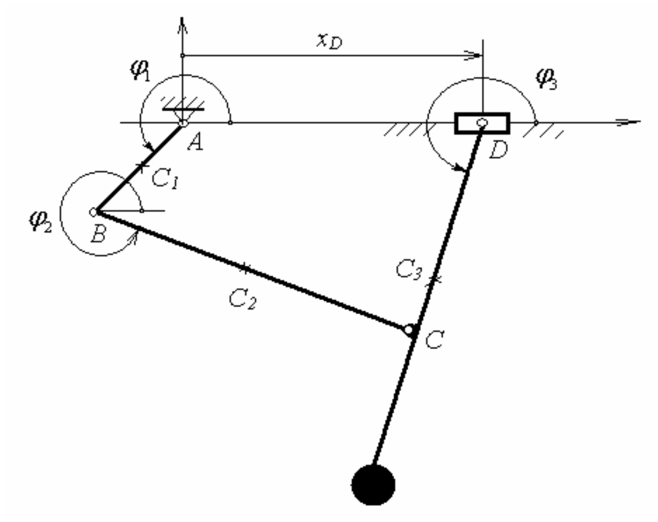


Figura 1.

unde $?_1, ?_2, ?_3$ cu s-au notat vitezele unghiulare ale elementelor respective.

Rezulta în final ca putem exprima vitezele dependente $?_2$ si $?_3$ în functie de vitezele coordonatelor independente $?_1$, $\dot{x}_D$ sub forma:

$$\begin{Bmatrix} l_2 ?_2 \\ l_3 ?_3 \end{Bmatrix} ? \frac{1}{s_2 c_3 ? s_3 c_2} \begin{bmatrix} ? c_3 & ? s_3 \\ ? c_2 & s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? s_1 & ? 1 \\ ? c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 ?_1 \\ \dot{x}_D \end{Bmatrix} ? \frac{1}{s_2 c_3 ? s_3 c_2} \begin{bmatrix} c_3 s_1 ? s_3 c_1 & ? c_3 \\ c_2 s_1 ? c_1 s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 ?_1 \\ \dot{x}_D \end{Bmatrix}$$

Notam:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} ? \frac{1}{s_2 c_3 ? s_3 c_2} \begin{bmatrix} c_3 s_1 ? s_3 c_1 & ? c_3 \\ c_2 s_1 ? c_1 s_2 & c_2 \end{bmatrix}.$$

si a acceleratiilor sub forma:

$$\begin{Bmatrix} l_2 ?_2 \\ l_3 ?_3 \end{Bmatrix} ? \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 ?_1 \\ \ddot{x}_D \end{Bmatrix} ? \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 ?_1^2 \\ l_1 ?_1 \dot{x}_D \\ \dot{x}_D^2 \end{Bmatrix},$$

unde coeficientii $b_{ij}$ se obtin dupa o serie de calcule elementare.

Pozitiile, vitezele si acceleratiile centrelor de masa se determina cu relatiile:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 l_1 c_1 \\ y_1 = a_1 l_1 s_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 l_1 \omega_1 s_1 \\ \dot{y}_1 = a_1 l_1 \omega_1 c_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \ddot{x}_1 = -a_1 l_1 \varepsilon_1 s_1 - a_1 l_1 \omega_1^2 c_1 \\ \ddot{y}_1 = a_1 l_1 \varepsilon_1 c_1 - a_1 l_1 \omega_1^2 s_1 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 c_1 + a_2 l_2 c_2 \\ y_2 = l_1 s_1 + a_2 l_2 s_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1 \omega_1 s_1 - a_2 l_2 \omega_2 s_2 \\ \dot{y}_2 = l_1 \omega_1 c_1 + a_2 l_2 \omega_2 c_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \ddot{x}_2 = -l_1 \varepsilon_1 s_1 - a_2 l_2 \varepsilon_2 s_2 - l_1 \omega_1^2 c_1 - a_2 l_2 \omega_2^2 c_2 \\ \ddot{y}_2 = l_1 \varepsilon_1 c_1 + a_2 l_2 \varepsilon_2 c_2 - l_1 \omega_1^2 s_1 - a_2 l_2 \omega_2^2 s_2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_3 = l_1 c_1 + l_2 c_2 + a_3 l_3 c_3 \\ y_3 = l_1 s_1 + l_2 s_2 + a_3 l_3 s_3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{x}_3 = -l_1 \omega_1 s_1 - l_2 \omega_2 s_2 - a_3 l_3 \omega_3 s_3 \\ \dot{y}_3 = l_1 \omega_1 c_1 + l_2 \omega_2 c_2 + a_3 l_3 \omega_3 c_3 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_3 = -l_1 \varepsilon_1 s_1 - l_2 \varepsilon_2 s_2 - a_3 l_3 \varepsilon_3 s_3 - l_1 \omega_1^2 c_1 - l_2 \omega_2^2 c_2 - a_3 l_3 \omega_3^2 c_3 \\ \ddot{y}_3 = l_1 \varepsilon_1 c_1 + l_2 \varepsilon_2 c_2 + a_3 l_3 \varepsilon_3 c_3 - l_1 \omega_1^2 s_1 - l_2 \omega_2^2 s_2 - a_3 l_3 \omega_3^2 s_3 \end{cases} ;$$

si pot fi exprimate, în final, în functie de vitezele si acceleratiile coordonatelor independente sub forma:

$$\{\ddot{q}\} = [[A_1][A_2]] \begin{Bmatrix} l_1 \varepsilon_1 \\ \ddot{x}_D \end{Bmatrix} + [[B_1][B_2][B_3]] \begin{Bmatrix} (l_1 \omega_1)^2 \\ (l_1 \omega_1 \dot{x}_D) \\ (\dot{x}_D)^2 \end{Bmatrix}$$

Pentru scrierea ecuatiilor de miscare se va tine seama de descompunerea sistemului în partile componente (fig.2).

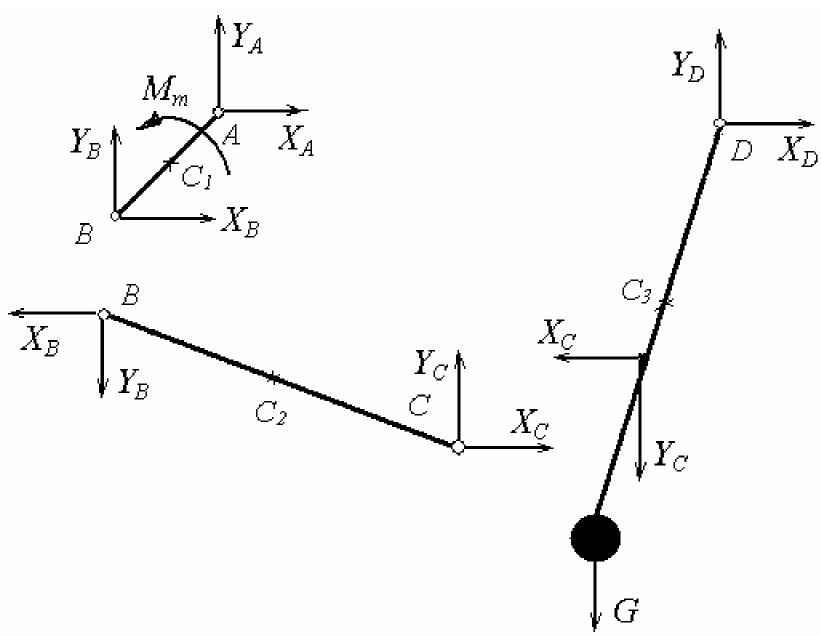


Figura 2

Daca se noteaza matricea maselor cu:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & & & & \\ & m_1 & & & & & & & \\ & & J_1 & & & & & 0 & \\ & & & m_2 & & & & & \\ & & & & m_2 & & & & \\ & & & & & J_2 & & & \\ & 0 & & & & & m_3 & & \\ & & & & & & & m_3 & \\ & & & & & & & & J_3 \end{bmatrix}$$

iar vectorul fortelor generalizate cu:

$$\{Q\} ? \begin{Bmatrix} X_A ? X_B \\ Y_A ? Y_B \\ X_A a_1 l_1 s_1 ? Y_A a_1 l_1 c_1 ? X_B (1 ? a_1) l_1 s_1 ? Y_B (1 ? a_1) c_1 \\ ? X_B ? X_C \\ ? Y_B ? Y_C \\ ? X_B a_2 l_2 s_2 ? Y_B a_2 l_2 c_2 ? X_C (1 ? a_2) l_2 s_2 ? Y_C (1 ? a_2) l_2 c_2 \\ X_D ? X_C \\ Y_D ? Y_C ? G_3 \\ ? X_D (1 ? a_3) l_3 s_3 ? Y_D (1 ? a_3) l_3 c_3 ? X_C a_3 l_3 s_3 ? Y_C a_3 l_3 c_3 ? G L_c s_3 \end{Bmatrix}$$

se obtin ecuatiile de miscare sub forma:

$$[m]\{a\} ? \{Q\}$$

sau, prin introducerea acceleratiilor:

$$[m](\{A_1\} ? \{A_2\}) \begin{Bmatrix} l_1 ?_1 \\ \ddot{x}_D \end{Bmatrix} ? (\{B_1\} ? \{B_2\} ? \{B_3\}) \begin{Bmatrix} (l_1 ?_1)^2 \\ (l_1 ?_1 \dot{x}_D) \\ (\dot{x}_D)^2 \end{Bmatrix} ? \{Q\}$$

## 3. ELIMINAREA FORTELOR DE LEGATURA

Vectorul fortelor generalizare $\{Q\}$ contine forte exterioare si momente ale fortelor exterioare si forte de legatura si momente ale fortelor de legatura. Fortele de legatura reprezinta necunoscute si nu sunt interesante în acest punct al rezolvarii. Pentru acest motiv se va proceda la eliminarea fortelor de legatura utilizând ortogonalitatea existenta între fortele de legatura si deplasarile virtuale compatibile cu legaturile respective [5],[6]. În acest scop se preînmultesc ecuatiile de echilibru cu $(\{A_1\} ? \{A_2\})^T$ . Se obtine:

$$\begin{Bmatrix} [A_1]^T \\ [A_2]^T \end{Bmatrix}[m]([A_1]\ [A_2])\begin{Bmatrix} \ddot{l}_1 \\ \ddot{x}_D \end{Bmatrix} ? ([B_1]\ [B_2]\ [B_3])\begin{Bmatrix} (\dot{l}_1)^2 \\ (\dot{l}_1 \dot{x}_D) \\ (\dot{x}_D)^2 \end{Bmatrix} ? \begin{Bmatrix} [A_1]^T \\ [A_2]^T \end{Bmatrix}\{Q\}$$

$$\begin{bmatrix} [A_1]^T[m][A_1] & [A_1]^T[m][A_2] \\ [A_2]^T[m][A_1] & [A_2]^T[m][A_2] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{l}_1 \\ \ddot{x}_D \end{Bmatrix} ?$$

$$? \begin{bmatrix} [A_1]^T[m][B_1] & [A_1]^T[m][B_2] & [A_1]^T[m][B_3] \\ [A_2]^T[m][B_1] & [A_2]^T[m][B_2] & [A_2]^T[m][B_3] \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} (\dot{l}_1)^2 \\ (\dot{l}_1 \dot{x}_D) \\ (\dot{x}_D)^2 \end{Bmatrix} ? \begin{Bmatrix} [A_1]^T\{Q\} \\ [A_2]^T\{Q\} \end{Bmatrix}$$

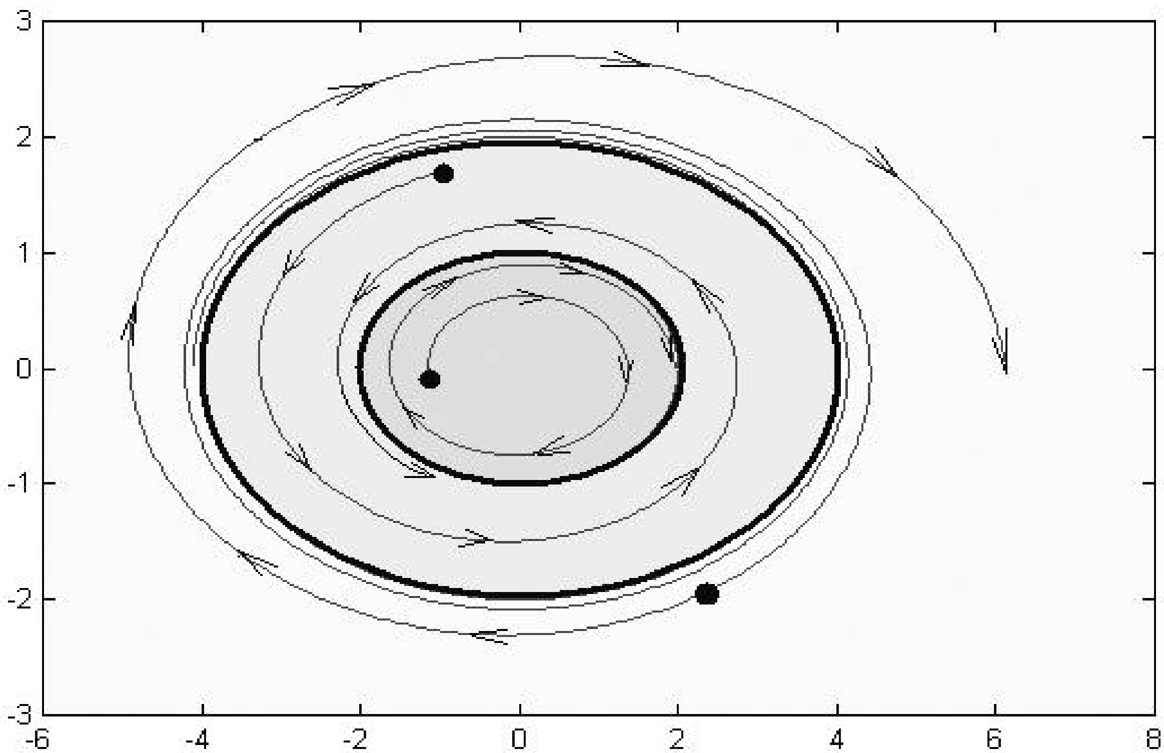


Figura 3

$$Q_1 ? [A_1]^T\{Q\} ?$$

$$? \frac{M_m}{l_1} ? F_R ( s_1 ? a_{11}s_2 ? a_{21}a_3s_3 ) ? G_3 (c_1 ? a_{11}c_2 ? a_{21}a_3c_3 ) ? ( GL_c s_3 ? F_R(1 ? a_3)l_3 s_3 ) \frac{a_{21}}{l_3}$$

$$Q_2 ? [A_2]^T\{Q\} ? F_R ( a_{12}s_2 ? a_{22}a_3s_3 ) ? G_3 (a_{12}c_2 ? a_{22}a_3c_3 ) ? ( GL_c s_3 ? F_R(1 ? a_3)l_3 s_3 ) \frac{a_{22}}{l_3}$$

Rezulta un sistem de doua ecuatii diferentiale cu doua necunoscute care sunt coordonatele nodale.

## 4. CONCLUZII

În cazul mecanismului considerat se pune functionarii stabile a acestuia în sensul ca, daca exista mici variatii ale momentului motor, miscarea pompei sa fie aproximativ la fel. Pentru a analiza acest lucru se face medierea ecuatiilor de miscare, deci se pune conditia ca miscarea sa fie cvasi-periodica, ceea ce intereseaza fiind comportarea medie, pe o perioada. Daca se fac integrarile impuse de mediere, atunci din sistemul de ecuatii diferentiale obtinut rezulta doua ecuatii diferentiale cu doua necunoscute. În final prin rezolvarea acestora si aplicarea metodei variatiei constantelor a lui Van der Pol se obtin doua valori ale turatiilor elementul de intrare astfel încât mecanismul sa aiba o comportare stabila în jurul celor doua valori. O reprezentare aproximativa în spatiul fazelor a fenomenului este data în fig.3.

## BIBLIOGRAFIE

1. **Deliu,Gh**., *Mechanical Engineering*. Ed. Albastra, Cluj, 2004.
2. **Lupu,M., Vlase**,**S**., *Studiul regulatoarelor de viteze în cazul unor mecanisme vibratoare neautonome, Conferinta de Dinamica Masinilor, Brasov, 2005.*
3. **Tofan, M., Vlase, S**., *Vibratiile sistemelor mecanice*. Universitatea TRANSILVANIA din Brasov, 1985.
4. **Vlase, S**., *Mecanica.Dinamica*. Ed. INFOMARKET, Brasov, 2005.
5. **Vlase,S.**, s.a., *On the Reactions Eliminating in the Virtual Dynamic Analysis of the Mechanisms*. Buletinul Institutului Politehnic din Iasi, Tomul L (LIV), Fasc. 6A, 2004,Sectia Constructii de Masini.
6. **Vlase, S**., A Method of Eliminating Lagrangean Multipliers from the Equation of Motion of Interconnected Mechanical System. ASME Transaction. Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, 1987, p.235-236.